FINANZMATHEMATIK

1. Zinsrechnung

1.1. Grundbegriffe der Zinsrechnung
1.2. Die vier Fragestellungen der Zinsrechnung
1.3. Berechnung des Endkapitals
1.4. Berechnung von Anfangskapital, Zinssatz und Laufzeit
1.5. Unterjährige Verzinsung
1.6. Stetige Verzinsung

2. Rentenrechnung

2.1. Grundbegriffe der Rentenrechnung
2.2. Die acht Fragestellungen der Rentenrechnung
2.3. Gleichbleibende Renten
- 2.3.1 Berechnung des Endwertes und des Barwertes
- 2.3.2 Berechnung der Rentenhöhe
- 2.3.3 Berechnung des Zinssatzes
- 2.3.4 Berechnung der Laufzeit

2.4. Ewige Renten
2.5. Veränderliche Renten
- 2.5.1 Sich regellos verändernde Renten
- 2.5.2 Sich regelmäßig ändernde Renten

3. Tilgungsrechnung

3.1. Grundbegriffe und Grundgleichungen der Tilgungsrechnung
3.2. Ratentilgung
3.3. Annuitätentilgung
3.4. Unterperiodische Tilgung

1 Zinsrechnung

1.1 Grundbegriffe der Zinsrechnung

Vertrag zwischen Partnern: Kapitalgeber und Kapitalnehmer

- Kapitalgeber besitzt Anfangskapital
- Nutzung wird Kapitalnehmer überlassen
- Am Ende der Laufzeit erhält der Kapitalgeber das Endkapital (=Anfangskapital + Zins) zurück

Vier Grundbegriffe:

- Anfangskapital
- Laufzeit
- Endkapital
- Zins

Symbole:

i	:=	Zinssatz	(in Prozent)
K_0	:=	Anfangskapital	(in Währungseinheit)
K_n	:=	Endkapital	(in Währungseinheit)
n	:=	Laufzeit	(in Jahren)

Laufzeit

Verwendung von standardisierten Zeitintervallen:

1 Monat	=	30 Tage
1 Quartal	=	90 Tage
1 Halbjahr	=	180 Tage
1 Jahr	=	360 Tage

Zinsen

Unterscheide:

Zinsbetrag := Differenz zwischen End- und Anfangskapital (in Währungseinheiten)

Zinssatz := Prozentsatz

Länge der Zinsperiode:

Jährlicher Zinssatz (Regelfall): in % p.a. (per annum)
Unterjähriger Zinssatz: in % p.r.t. (pro rata temporis)

Rechnerische Bezugsgröße des Zinssatzes:

Anfangskapital (Regelfall): nachschüssig

$$i_{nach} = (K_1 - K_0)/K_0$$

Endkapital: vorschüssig

$$i_{vor} = (K_1 - K_0)/K_1$$

1.2 Die vier Fragestellungen der Zinsrechnung

- Gesucht: Endkapital
- Gesucht: Anfangskapital
- Gesucht: Zinssatz
- Gesucht: Laufzeit

1.3 Berechnung des Endkapitals

1.3.1 Mit einfachen Zinsen

Zinsansprüche werden **während der Laufzeit nicht** dem zinstragenden Kapital **zugeschlagen.**

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 + i \cdot K_0 \\ &= K_0 \cdot (1+i) \\ K_n &= K_0 + n \cdot i \cdot K_0 \\ &= K_0 \cdot (1 + n \cdot i) \end{aligned}$$

1.3.2 Mit Zinseszinsen

(betrachten Standardfall: jährlich nachschüssige Zinsen)

Zinsansprüche, die während der Laufzeit entstehen, werden am Ende der Zinsperiode **dem zinstragenden Kapital zugeschlagen** und daher in der zweiten Periode mitverzinst.

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 + i \cdot K_0 \\ &= K_0 \cdot (1+i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2 &= K_1 + i \cdot K_1 \\ &= K_1 \cdot (1+i) \\ &= K_0 \cdot (1+i) \cdot (1+i) \\ &= K_0 \cdot (1+i)^2 \end{aligned}$$

$$K_1 = K_0 \cdot (1+i)$$

$$K_2 = K_0 \cdot (1+i)^2$$

...

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot (1+i)^n}$$

q := 1+i (Aufzinsungsfaktor)

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot q^n}$$ (allgemeine Zinseszinsformel)

⇨ Endkapital entwickelt sich bei Zinseszins in Abhängigkeit von der Laufzeit **exponentiell mit Wachstumsrate i**

Beispiel einfache Verzinsung vs. Zinseszins:
finanzmathematik_übung.xls

1.4 Berechnung von Anfangskapital, Zinssatz und Laufzeit (Zinseszins)

1.4.1 Anfangskapital

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

$$K_0 = \frac{K_n}{q^n}$$

$$= K_n \cdot q^{-n}$$

Beispiel: finanzmathematik_übung.xls

1.4.2 Zinssatz

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

Beispiel: finanzmathematik_übung.xls

1.4.3 Laufzeit

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

$$\ln q^n = \ln \frac{K_n}{K_0}$$

$$n \cdot \ln q = \ln \frac{K_n}{K_0}$$

$$n = \frac{\ln \frac{K_n}{K_0}}{\ln q}$$

Beispiel: finanzmathematik_übung.xls

1.5 Unterjährige Verzinsung

1.5.1 Übertragung der Berechnungsformeln von der jährlichen zur unterjährigen Verzinsung

Im Folgenden arbeiten wir mit kürzeren Zinsperioden (Halbjahr, Quartal, etc.). Der Zinsbetrag wird mehrmals pro Jahr berechnet und zugeschlagen. Weiters wird mit unterjährigen Zinssätzen gerechnet.

Zusätzliche Symbole:

m	Anzahl der Zinsperioden pro Jahr (z.B. m=12, wenn Zinsperiode = 1 Monat)
j	unterjähriger (auf Zinsperiode bezogener) Zinssatz
N	Laufzeit der Kapitalanlage, in Zinsperioden

$$N = n.m$$

Zwei Variablen werden in den Formeln der jährlichen Zinsberechnung ersetzt:

1. der Jahreszins i durch den unterjährigen Zinssatz j
2. die Laufzeit in Jahren, n, durch die in Zinsperioden, N

$$K_N = K_0.(1+j)^N$$

Beispiel:
Sie haben 4000€ auf ein Sparbuch mit einer Verzinsung von 1,875% je Quartal. Wie groß ist das Kapital nach 4 Jahren und 10 Monaten (nach Zinseszinsrechnung)?

d.h.: n = 4 + 10/12
m = 4

Inputs: j=0,01875
N=4.(4+10/12)= 19,33

Output: $K_N = 4000.(1+0{,}01875)^{19,33} = 5728{,}05$

(EXCEL: ZW)

Beispiel:
Herr Anton besitzt Kapital in der Höhe von 1000€, und er möchte in 10 Monaten über 1050€ verfügen. Welchen Zinssatz pro Halbjahr muß er bekommen, um dieses Ziel zu erreichen?

$$i = \sqrt[N]{\frac{K_N}{K_0}} - 1$$

Die Anzahl der Zinsperioden ist N =m.n = 2.(10/12)= 1,667, daher ist der gesuchte halbjährliche Zins

i = 2,97%

(EXCEL: ZINS)

1.5.2 Die Konzepte des nominellen, relativen, effektiven und konformen Zinssatzes

Sämtliche Gleichungen der Zinsrechnung mit jährlichen Zinsen können auf die Zinsrechnung mit unterjährigen Zinsen übertragen werden ($i \rightarrow j$ und $n \rightarrow N$).

Nun kann man zu den gleichen Ergebnissen kommen, wenn man die Laufzeit in Jahren misst **und die Zinssätze anpasst.**

Ausgehend vom **Jahreszinssatz i (nominell)**, wird der unterjährige oder **relative Zinssatz** durch Division des nominellen durch die Anzahl der Zinsperioden m pro Jahr ermittelt:

$$i_{rel} = i_{nom}/m$$

Einfache Verzinsung mit dem **relativen Zinssatz** entspricht **einfacher Verzinsung** mit dem **nominellen Zinssatz.**

Wenn nun dem Anfangskapital in mehreren (m) Zinsperioden pro Jahr jeweils ein Zinsbetrag gemäß dem relativen Zinssatz gutgeschrieben wird (Zinseszins), so ist die Summe dieser Zinsbeträge nach einem Jahr nicht gleich dem Zinsbetrag, der sich aus der jährlichen Verzinsung mit dem nominellen Jahreszinssatz ergibt.

Beispiel:

Ein Betrag von € 100.000.- wird ein Jahr lang zu 12% verzinst, das Kapital ist daher nach einem Jahr

$$K_1 = K_0.(1+0,12)^1 = 112.000.$$

Nehmen wir nun an, daß ein monatlicher relativer Zins von 12%/12, also 1% pro Monat zugeschlagen wird, so ergibt sich nach einem Jahr ein Endkapital von:

$$K_{12} = K_0.(1+0,01)^{12} = 112.683$$

Die sog. **effektive** Verzinsung ist daher in diesem Beispiel höher als 12% p.a., und zwar 12,68%. Wir nennen diesen Zinssatz den **effektiven Zinssatz**.

Der effektive Jahreszins gibt an: wie hoch muss die Jahresverzinsung sein, damit das mit diesem Zinssatz berechnete Endkapital mit jenem übereinstimmt, das sich aus der unterjährigen Verzinsung mit dem relativen Zins ergeben hat, wie groß ist also i_{eff}, sodass gilt:

$$K_0(1 + i_{eff}) = K_0(1 + i_{rel})^m$$

Daher gilt für den Effektivzins:

$$i_{eff} = (1 + \frac{i_{nom}}{m})^m - 1$$

oder

$$i_{eff} = (1 + i_{rel})^m - 1$$

Umgekehrt kann jener unterjährige Zinssatz ermittelt werden, der zu einer jährlichen Verzinsung von (z.B.) 12% führt, also mit einer vorgegebenen (**nominellen**) Verzinsung **konform** geht. Dieser wird als der **konforme Zinssatz** bezeichnet. Es muss in diesem Falle also gelten:

$$K_0(1+i_{nom}) = K_0(1+i_{kon})^m$$

Daraus folgt:

$$i_{kon} = \sqrt[m]{1+i_{nom}} - 1$$

Beispiel:
Der monatliche konforme Zinssatz mit einer jährlichen Verzinsung von 12%:

$$i_{kon} = \sqrt[12]{1+0{,}12} - 1 = 0{,}00949 = 0{,}949\%$$

Beispiele: finanzmathematik_übung.xls

1.6 Stetige (kontinuierliche) Verzinsung

Wie entwickelt sich die Verzinsung, wenn die Anzahl der Zinsperioden pro Jahr (m) immer größer wird und über alle Grenzen wächst ($m \to \infty$)?

Beispiel: finanzmathematik_übung.xls

Wir ermitteln die Verzinsung in diesem Falle durch die Berechnung des effektiven Zinssatzes auf der Basis eines gegebenen nominellen Zinssatzes, wenn m unendlich groß wird ($m \to \infty$):

Für einen fixen nominellen Jahreszinssatz i ist der zugehörige effektive Zinssatz :

$$i_{eff} = (1 + \frac{i_{nom}}{m})^m - 1$$

Lassen wir nun m über alle Grenzen anwachsen, dann ist

$$\mathrm{i}_{\mathrm{eff}} = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{i_{nom}}{m}\right)^m - 1 .$$

Aus dem Zusammenhang

$$\mathrm{e} = \lim_{h \to \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h$$

ergibt sich mit Hilfe der Substitution: $h = m/i_{nom}$

$$\mathrm{i}_{\mathrm{eff}} = \lim_{h \cdot i_{nom} \to \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^{h \cdot i_{nom}} - 1$$

$$\mathrm{i}_{\mathrm{eff}} = e^{i_{nom}} - 1$$

und man erhält durch Einsatzen von $\mathrm{i}_{\mathrm{eff}}$ in

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i_{eff})^n$$

das Ergebnis:

$$\boxed{K_n = K_0 . e^{i_{nom} \cdot n}}.$$

Ableiten der Formeln für die der anderen Variablen:

$$\boxed{K_0 = K_n . e^{-i_{nom} \cdot n}}$$

wegen

$$K_n / K_0 = e^{i_{nom} \cdot n} \quad \text{und} \quad \ln(\frac{K_n}{K_0}) = i_{nom} . n$$

folgt

$$\boxed{i = \frac{1}{n} \ln(\frac{K_n}{K_0})}$$

sowie

$$\boxed{n = \frac{1}{i} \ln(\frac{K_n}{K_0})}$$

2 Rentenrechnung

2.1 Grundbegriffe der Rentenrechnung

Rente := regelmäßig wiederkehrende Zahlung

Merkmale:

(a) Rentenhöhe
(b) Rentendauer
(c) Terminierung einer Rentenzahlung
(d) Verhältnis von Renten- und Zinsperiode

(a) Rentenhöhe:

- Gleichbleibende Renten
- Veränderliche Renten
  - Sich regelmäßig ändernde Renten
  - Sich regellos ändernde Renten

(b) Rentendauer:

- Anzahl der Rentenzahlungen (Mindestanzahl: 2)
  - Endliche Renten
  - Ewige Renten

(c) Terminierung einer Rentenzahlung:

- Bestimmt den Zeitpunkt der ersten Zahlung (Beginn oder Ende der Rentenperiode)
  - Vorschüssige Rente
  - Nachschüssige Rente

(d) Verhältnis von Renten- und Zinsperiode

⇨ folgende Kombinationen

Jährliche Renten

1. Mit jährlichen Zinsen
2. Mit unterjährlichen Zinsen

Unterjährliche Renten

1. Mit jährlichen Zinsen
2. Mit unterjährlichen Zinsen
    1. Zinsperiode > Rentenperiode
    2. Zinsperiode = Rentenperiode
    3. Zinsperiode < Rentenperiode

Wichtige Symbole:

i	:=	(jährlicher) Zinssatz
n	:=	Laufzeit der Rente (in Jahren)
r_t	:=	Rentenzahlung im Zeitpunkt t
R_0	:=	Rentenbarwert
R_n	:=	Rentenendwert

Bei unterjährlichen Renten und/oder Zinsen

m_r	:=	Anzahl der Rentenperioden je Jahr
m_z	:=	Anzahl der Zinsperioden je Jahr

2.2 Die acht Fragestellungen der Rentenrechnung

Gegeben:	Rente	r	1
	Zinssatz	i	
	Laufzeit	n	
Gesucht:	Rentenendwert	R_n	

Gegeben:	Rente	r	2
	Zinssatz	i	
	Laufzeit	n	
Gesucht:	Rentenbarwert	R_0	

Gegeben:	Rentenendwert	R_n	3
	Zinssatz	i	
	Laufzeit	n	
Gesucht:	Rente	r	

Gegeben:	Rentenbarwert	R_0	4
	Zinssatz	i	
	Laufzeit	n	
Gesucht:	Rente	r	

Gegeben:	Rentenendwert	R_n	5
	Rente	r	
	Laufzeit	n	
Gesucht:	Zinssatz	i	

Gegeben:	Rentenbarwert	R_0	6
	Rente	r	
	Laufzeit	n	
Gesucht:	Zinssatz	i	

Gegeben:	Rentenendwert	R_n	7
	Rente	r	
	Zinssatz	i	
Gesucht:	Laufzeit	n	

Gegeben:	Rentenbarwert	R_0	8
	Rente	r	
	Zinssatz	i	
Gesucht:	Laufzeit	n	

2.3 Gleichbleibende Renten

Endliche Ratenzahlungen in **gleichbleibender** Höhe

Für die Dauer von **n Jahren** wird wiederkehrend eine **Rate r** gezahlt.

Betrachteter Standardfall:
- Renten- und Zinsperioden von jeweils einem Jahr
- nachschüssige Rente oder vorschüssige Rente

2.3.1 Berechnung des Endwertes und des Barwertes

1. und 2. Fragestellung

Abbildung: Zeitstruktur finanzmathematik_übung.xls (Blatt: Grafik)

Jeweils am Ende eines Jahres wird der Betrag r auf ein Konto eingezahlt. Nach Jahresfrist wird mit dem Faktor i verzinst.

$$R_1 = r$$
$$R_2 = r + R_1 \cdot q = r + r \cdot q$$
$$R_3 = r + R_2 \cdot q = r + r \cdot q + r \cdot q^2$$
$$\ldots$$
$$R_n = r + R_{n-1} \cdot q = r + r \cdot q + r \cdot q^2 + \ldots + r \cdot q^{n-2} + r \cdot q^{n-1}$$

$$R_n = r \cdot \left(1 + q + q^2 + \ldots q^{n-1}\right)$$

Verwende die Formel für eine endliche geometrische Reihe, dann ergibt sich daraus für den **Rentenendwert**:

$$\boxed{R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot \frac{q^n - 1}{i}}$$

Rentenendwertfaktor (REFN) = $\dfrac{q^n - 1}{i}$

Berechnung mit EXCEL: Funktion ZW (siehe: finanzmathematik_übung.xls)

Berechne **2 Varianten**:
- nachschüssige Zahlungen
- vorschüssige Zahlungen

Zur Berechnung des **Rentenbarwerts** ist der Rentenendwert gemäß Zinseszinsrechnung abzuzinsen. Unter Verwendung von

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

bzw. von

$$R_n = R_0 \cdot q^n$$

ergibt sich

$$\boxed{R_0 = R_n \cdot q^{-n} = r \cdot \frac{q^n - 1}{i \cdot q^n}}$$

Beispiel: finanzmathematik_übung.xls
Funktion BW (2 Varianten: nachschüssig und vorschüssig)

Rentenbarwertfaktor (RBFN) = $\frac{q^n - 1}{i \cdot q^n}$

Siehe auch: finanzmathematik_übung.xls

2.3.2 Berechnung der Rentenhöhe

(3. und 4. Fragestellung)

Aus der Rentenendwert- bzw- Barwertformel ergibt sich:

$$r = R_n \cdot \frac{i}{q^n - 1}$$

Beispiel: finanzmathematik_übung.xls

$$r = R_0 \cdot \frac{i \cdot q^n}{q^n - 1}$$

Berechnung mit EXCEL: Funktion RMZ

Beispiel: finanzmathematik_übung.xls (Bsp. 2, Rentenrechnung)

Annuitätenfaktor oder Wiedergewinnungsfaktor

$$\text{(ANNF)} = \frac{i \cdot q^n}{q^n - 1} = \frac{1}{RBFN}$$

2.3.3 Berechnung des Zinssatzes

5. und 6. Fragestellung

Weder die Endwert- noch die Barwertgleichung sind allgemein nach i auflösbar:

$$R_n = r \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Daher wird der Zinssatz näherungsweise mit einem Nullstellverfahren ermittelt:

$$f(i) = -R_n + r \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Gesucht wird jenes i, bei dem f(i) den Wert 0 hat. Dies geschieht mittels der Tangentenmethode von Newton.

Beginne mit einem Versuchswert i_k in der Umgebung des Lösungswerts und berechne iterativ verbesserte Lösungswerte.

Dafür wird die erste Ableitung der Funktion f(i) benötigt:

$$f'(i) = r \cdot \frac{i \cdot n \cdot q^{n-1} - q^n + 1}{i^2}$$

i_{k+1} ergibt sich dann als

$$i_{k+1} = i_k - \frac{f(i_k)}{f'(i_k)}$$

Sobald die Differenz zwischen i_k und i_{k+1} hinreichend klein wird, kann die Iteration abgebrochen werden.

Analog kann die Iteration bei gegebenem Barwert durchgeführt werden. Hierbei ist die zu verwendende Funktion f(i)

$$f(i) = -R_0 + r \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}$$

Und die zugehörige erste Ableitung

$$f'(i) = r \cdot \frac{i \cdot n - q^{n+1} + q}{i^2 \cdot q^{n+1}}.$$

Berechnung mittels EXCEL: Funktion ZINS

Beispiele: finanzmathematik_übung.xls

Beispiel
(aus der Praxis der Autobranche; Wirtschaftswoche Mai 1995)

Angeboten wird von einer Autofirma folgende Zahlungsmodalität:

> *Ein Gebrauchtwagen, der € 4.650.- kostet, kann in 48 Monatsraten zu je € 174.- abbezahlt werden.*

<u>Frage:</u> wie hoch ist der Jahreszinssatz (nomineller Zinssatz, effektiver Zinssatz) bei diesem Zahlungsarrangement?

<u>Lösung in zwei Schritten:</u>

1. Schritt: Berechnung des Zinssatzes bezogen auf die Rentenperiode (= Monat) mithilfe der Funktion ZINS; ergibt den (monatlichen) Zinssatz.

   (Monatszinssatz: 2,70%)

2. Schritt: Berechnung des nominellen Zinssatzes aus der Formel

$$i_{rel} = i_{nom}/m$$

=>

$$i_{nom} = 12*2{,}7\% = 32{,}4\%$$

sowie des effektiven Zinssatzes aus der Formel

$$i_{eff} = (1 + i_{rel})^m - 1$$

37,7%

2.3.4 Berechnung der Laufzeit

7. und 8. Fragestellung

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{i}$$

$$q^n = 1 + \frac{i \cdot R_n}{r}$$

$$n \cdot \ln q = \ln\left(1 + \frac{i \cdot R_n}{r}\right)$$

$$\boxed{n = \frac{\ln\left(1 + \frac{i \cdot R_n}{r}\right)}{\ln q}}$$

Die Laufzeit wird gleichfalls durch logarithmieren bei gegebenem Rentenbarwert abgeleitet

$$R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{i \cdot q^n}$$

$$\boxed{n = \frac{\ln\left(\frac{r}{r - i \cdot R_0}\right)}{\ln q}}$$

Berechnung mit EXCEL: Funktion ZZR

Beispiele: finanzmathematik_übung.xls

2.4 Ewige Renten

Ewige Renten sind Zahlungsströme, die **unendlich lange fließen.**

Wir betrachten den einfachen Standardfall: gleichbleibende *nachschüssige* jährliche Zahlungen mit jährlicher Verzinsung.

> **Endwert** einer ewigen Rente ist unendlich groß
> (selbst wenn keine Zinsen verrechnet werden).
> **Barwert** einer ewigen Rente ist endlich,
> wenn mit positiven Zinssätzen verzinst wird.

Der Barwert einer *endlichen* Rente ist, wie wir wissen

$$R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{i \cdot q^n}$$

$$= r \cdot \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i \cdot q^n} \right).$$

Um den Barwert einer ewigen nachschüssigen Rente zu berechnen, lassen wir $n \to \infty$ gehen

$$R_0 = r \cdot \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i \cdot q^n} \right).$$

und erhalten mit der ökonomisch sinnvollen Voraussetzung $i > 0$ ($\Rightarrow q > 1 \Rightarrow \lim q^n \to \infty$) für den Rentenbarwert einer nachschüssigen Rente

$$\boxed{R_0 = \frac{r}{i}}.$$

Ewige Renten kommen in der Praxis selten vor. Sie dienen jedoch zur einfachen und schnellen (näherungsweisen) Schätzung von Renten mit langer Laufzeit.

Beispiel: eine Büroimmobilie erbringt jährlich einen Nettoertrag von € 720.000.- Was ist der Wert dieser Immobilie bei einem angenommenen Zinssatz von 6% (8%; 10%)? finanzmathematik_übung.xls

Frage: wie groß ist der Fehler der Barwertschätzung in Abhängigkeit von der Laufzeit?

Siehe finanzmathematik_übung.xls

Beispiel: die theoretische Definition des Einheitswertes eines Grundstückes lautet: der Einheitswert repräsentiert einen Ertragswert, der dem 18-fachen Reinertrag eines Betriebes mit entlohnten fremden Arbeitskräften bei ortsüblicher und nachhaltiger Bewirtschaftung entspricht.
Frage: Wie hoch ist die Verzinsung unter der Annahme einer unbeschränkten Bewirtschaftungsmöglichkeit des Grundstücks? (5,56%)
Wie hoch ist die Verzinsung unter der Annahme einer Bewirtschaftungsmöglichkeit des Grundstücks von 50 Jahren? (5,09%)

2.5 Veränderliche Renten

... regelmäßig wiederkehrende Zahlungen, die **im Zeitablauf schwanken**.

Betrachten jährliche Zahlungen mit jährlicher Verzinsung.

Die Veränderung kann

> **regelmäßig sein**, d. h. einem funktionalen Zusammenhang folgen wie z. B.
> (100, 200, 400, 800, ...),
> (100, 200, 300, 400, ...) oder
>
> **regellos** sein, wie z. B.
> (100, 400, 300, 600, 700, 200, ...).

2.5.1 Sich regellos ändernde Renten

Für Endwertberechnung werden im Wesentlichen nur die Kontostände im Zeitablauf verfolgt.

$$R_1 = r_1$$
$$R_2 = r_2 + R_1 \cdot q = r_2 + r_1 \cdot q$$
$$R_3 = r_3 + R_2 \cdot q = r_3 + r_2 \cdot q + r_1 \cdot q^2$$
$$\ldots$$
$$R_n = r_n + R_{n-1} \cdot q = r_n + r_{n-1} \cdot q + \ldots + r_2 \cdot q^{n-2} + r_1 \cdot q^{n-1}$$

nachdem gilt:

$$q^{n-1} = q^n . q^{-1}$$

und

$$q^{n-2} = q^n . q^{-2}$$

usw.

kann man die letzte Zeile oben auch so schreiben:

$$R_n = r_n . q^n . q^{-n} + r_{n-1} \cdot q^n . q^{-(n-1)} + \ldots + r_2 \cdot q^n . q^{-2} + r_1 \cdot q^n . q^{-1}$$

oder durch Herausheben von q^n, Änderung der Reihenfolge und Verwendung des Summenoperators:

Rentenendwert

$$\boxed{R_n = q^n \cdot \sum_{t=1}^{n} r_t q^{-t}}.$$

Durch n-periodiges Abzinsen gelangt man vom Rentenendwert zum **Rentenbarwert** und man erhält

$$\boxed{R_0 = R_n \cdot q^{-n} = \sum_{t=1}^{n} r_t q^{-t}}.$$

Berechnung mit EXCEL:
Rentenbarwert mit Funktion NBW; Rentenendwert mit aufgezinstem NBW

Beispiel: finanzmathematik_übung.xls

Bei gegebenem Barwert bzw. Endwert kann für eine sich regellos ändernde Rente der **Zinssatz** eindeutig berechnet werden.

Für n>3 kann die Formel für Barwert bzw. Endwert **nicht explizit** nach q bzw. i aufgelöst werden, daher wird wie in 2.3.3 das Newtonverfahren zur Auffindung von i verwendet.

2.5.2 Sich regelmäßig ändernde Renten

... ändern sich nach einem bekannten funktionalen Zusammenhang. Besonders wichtig sind hierbei die

arithmetisch fortschreitende (Rente steigt jährlich um bestimmten Betrag) und die

geometrisch fortschreitende (Rente steigt jährlich um bestimmten Prozentsatz) Rente.

2.5.2.1 Arithmetisch fortschreitende Rente

... einzelne Rentenzahlungen bilden eine **arithmetische Folge**, d.h. die Rente steigt jährlich um einen fixen Betrag.

$$r_{t+1} = r_t + d$$

Daher ergibt sich

$$\begin{aligned}
r_1 &= r \\
r_2 &= r + d \\
r_3 &= r_2 + d = r + 2d \\
&\dots \\
r_n &= r_{n-1} + d = r + (n-1) \cdot d
\end{aligned}$$

Die Rentenzahlung zum Zeitpunkt t ist daher

$$r_t = r + (t-1) \cdot d \;.$$

Endwert- und Barwertberechnung

Den **Endwert** einer solchen Rente erhält man durch Einsetzen dieser Formel in die Endwertformel einer sich regellos ändernden Rente

$$R_n = q^n \cdot \sum_{t=1}^{n} r_t q^{-t}\ .$$

$$R_n = q^n \cdot \sum_{t=1}^{n} \left(r + (t-1)\cdot d\right)\cdot q^{-t}\ .$$

Diese Summe läßt sich in den bequemeren Ausdruck umformen

$$\boxed{R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{i} + \frac{d}{i} \cdot \left(\frac{q^n - 1}{i} - n \right)}.$$

Der Rentenbarwert ist wieder das Ergebnis von n-periodigem Abzinsen

$$\boxed{R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{i \cdot q^n} + \frac{d}{i} \cdot \left(\frac{q^n - 1}{i \cdot q^n} - n \cdot q^{-n} \right)}.$$

Beispiele: finanzmathematik_übung.xls

(siehe insbesondere: vereinfachte Berechnung mithilfe der Funktion NBW!)

Berechnung der Rente

Sowohl Barwert- als auch Endwertgleich lassen sich problemlos bei bekanntem d auflösen.

Zinssatz- und Laufzeitberechnung

Die **Zinssatz-** sowie die **Laufzeit-Berechnung** ist schwieriger, die Barwert- und Endwertgleichung können nicht explizit nach i bzw. n aufgelöst werden.

Wieder wird auf das Newtonverfahren zurückgegriffen. Ausgehend von einem geschätzten i bzw. n wird iterativ eine Lösung für f(i,n) = 0 gesucht mit

$$f(i,n) = -R_n + r \cdot \frac{q^n - 1}{i} + \frac{d}{i} \cdot \left(\frac{q^n - 1}{i} - n \right)$$

und

$$i_{k+1} = i_k - \frac{f(i_k)}{f'(i_k)} \qquad \text{und} \qquad n_{k+1} = n_k - \frac{f(n_k)}{f'(n_k)}$$

Um den **Zinssatz** zu berechnen wird die Ableitung nach i benötigt

$$f'(i) = \frac{r}{i} \cdot \left(nq^{n-1} - \frac{q^n - 1}{i} \right) + \frac{d}{i^2} \cdot \left(n + nq^{n-1} - 2\frac{q^n - 1}{i} \right).$$

Um die **Laufzeit** zu berechnen wird die Ableitung nach n benötigt

$$f'(n) = -\frac{d}{i} + \frac{q^n \ln q}{i} \cdot \left(r + \frac{d}{i} \right).$$

Beispiel: Laufzeitberechnung mithilfe des Newton-Verfahrens (finanzmathematik_übung.xls: Blatt: Newton)

Werden Laufzeit und Zinssatz aus dem Rentenbarwert berechnet, wird die Nullstelle bzgl. n bzw. i der Formel

$$f(i,n) = -R_0 + r \cdot \frac{q^n - 1}{i \cdot q^n} + \frac{d}{i} \cdot \left(\frac{q^n - 1}{i \cdot q^n} - n \cdot q^{-n} \right)$$

gesucht. Es werden die Ableitungen nach i und n gebildet.

$$f'(i) = \frac{r}{i} \cdot \left(\frac{n}{q^{n+1}} - \frac{q^n - 1}{iq^n} \right) + \frac{d}{i^2} \cdot \left(\frac{n}{q^{n+1}} (1 + q + in) - 2 \frac{q^n - 1}{iq^n} \right)$$

$$f'(n) = -q^{-n} \left(\frac{d}{i} - \frac{\ln q}{i} \cdot \left(r + nd + \frac{d}{i} \right) \right).$$

2.5.2.2 Geometrisch fortschreitende Renten

... einzelne Rentenzahlungen bilden eine **geometrisch Folge**, d.h. die Rente steigt jährlich um einen fixen Prozentsatz.

$$r_{t+1} = r_t \cdot g$$

Also:

$$r_1 = r$$

$$r_2 = r_1 \cdot g$$

$$r_3 = r_2 \cdot g = r \cdot g^2$$

$$\dots$$

$$r_n = r_{n-1} \cdot g = r \cdot g^{n-1}$$

Die Rentenzahlung zum Zeitpunkt t ist daher

$$r_t = r \cdot g^{t-1}.$$

Endwert- und Barwertberechnung

Den **Endwert** einer solchen Rente erhält man durch Einsetzen in die Endwertformel einer sich regellos ändernden Rente

$$R_n = q^n \cdot \sum_{t=1}^{n} r_t q^{-t} .$$

$$R_n = \sum_{t=1}^{n} r \cdot g^{t-1} \cdot q^{n-t} .$$

Diese Summe läßt sich bequemer schreiben als

$$\boxed{R_n = r \cdot \frac{q^n - g^n}{q - g} \qquad \text{(wenn q} \neq \text{g)}}$$

$$\boxed{R_n = r \cdot n \cdot q^{n-1} \qquad \text{(wenn q} = \text{g)}}.$$

Die Barwertformel folgt einfach durch n-periodiges Abzinsen:

$$\boxed{R_0 = r \cdot \frac{q^n - g^n}{(q - g) \cdot q^n} \qquad \text{(wenn q} \neq \text{g)}}$$

$$\boxed{R_0 = \frac{r \cdot n}{q} \qquad \text{(wenn q} = \text{g)}}.$$

Beispiele: finanzmathematik_übung.xls

Berechnung der Rente

Sowohl Barwert- als auch Endwertgleich lassen sich problemlos bei bekanntem g auflösen.

Zinssatz- und Laufzeitberechnung

Bei der **Zinssatz-** sowie der **Laufzeit-Berechnung** ist wieder auf ein Näherungsverfahren (Newton-Verfahren zurückzugreifen.

Bei bekanntem Endwert:

$$f(i,n) = -R_n + r \cdot \frac{q^n - g^n}{q-g}$$

$$f'(i) = \frac{r}{q-g} \cdot \left(nq^{n-1} - \frac{q^n - g^n}{q-g} \right)$$

$$f'(n) = r \cdot \frac{q^n \ln q - g^n \ln g}{q-g}$$

Bei bekanntem Barwert:

$$f(i,n) = -R_0 + r \cdot \frac{q^n - g^n}{(q-g) \cdot q^n}$$

$$f'(i) = \frac{r}{q-g} \cdot \left(\frac{ng^n}{q^{n+1}} - \frac{q^n - g^n}{(q-g) \cdot q^n} \right)$$

$$f'(n) = r \cdot \frac{g^n (\ln q - \ln g)}{q^n (q-g)}$$

3 Tilgungsrechnung

3.1 Grundbegriffe und Grundgleichungen der Tilgungsrechnung

Bei **Kreditverträgen** können unterschiedlichste Rückzahlungsmodalitäten vereinbart werden. Die beiden bekanntesten Standards sind:

- **Ratentilgung** und
- **Annuitätentilgung**

Annahmen:

- Schuldner leistet **Zahlungen** jeweils am **Jahresende**
- Zinsen werden **jährlich nachschüssig** verrechnet
- Zins- und Tilgungstermin stimmen überein

Symbole:

A_t	:=	Annuität im Zeitpunkt t
K_t	:=	Schuldbetrag im Zeitpunkt t (K_0 := ursprüngliche Schuld)
i	:=	Zinssatz p.a.
n	:=	Laufzeit
T_t	:=	Tilgungsrate im Zeitpunkt t
Z_t	:=	Zinsbetrag im Zeitpunkt t

Achtung:
Wenn die obigen Annahmen gelten, so bedeutet die Zeitindizierung (t) jeweils das Ende der Periode t!

Ratentilgung: Die Tilgung erfolgt in gleichbleibenden Raten

$$T_1 = T_2 = \ldots = T_n = T$$

Annuitätentilgung: Der Schuldner leistet Annuitäten in gleichbleibender Höhe

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$$

Gesucht:

- Die **Höhe** der Zahlungen zu den jeweiligen Zeitpunkten (Perioden)
- Die **Zerlegung** der Zahlungen in ihre Bestandteile
- Die **Restschuld** des Schuldners zu den jeweiligen Zeitpunkten (Perioden)

Vier Definitionsgleichungen (Grundgleichungen):

Bei den genannten Standardbedingungen beruht die Tilgungsrechnung auf vier einfachen Definitionsgleichungen (auch: Grundgleichungen, im Folgenden abgekürzt: GG).

GG1: Jede Annuität setzt sich aus Zinsbetrag und Tilgungsrate zusammen.

$$A_t = Z_t + T_t$$

GG2: Der Schuldbetrag (zum Zeitpunkt t) ergibt sich durch Abzug der Tilgungsrate vom Schuldbetrag des Vorjahres (Zeitpunkt t-1).

$$K_t = K_{t-1} - T_t$$

GG3: Die Summe aller Tilgungsbeträge ist gleich der ursprünglichen Schuld.

$$K_0 = \sum_{t=1}^{n} T_t$$

GG4: Den jeweiligen Zinsbetrag (zum Zeitpunkt t) erhält man durch Anwendung des Zinssatzes auf den Schuldbetrag des Vorjahres (t-1).

$$Z_t = i \cdot K_{t-1}$$

Sind K_0, i und die Tilgungsdauer n gegeben, so ist der

Rückzahlungsplan oder **Tilgungsplan** aus diesen Angaben in allen Details ableitbar.

Aus den vier Grundgleichungen kann eine fünfte GG abgeleitet werden (die jedoch ein Ergebnis der anderen Grundgleichungen ist):

GG5: Die ursprüngliche Schuldsumme K_0 ist gleich dem Barwert der Annuitäten

$$K_0 = \sum_{t=1}^{n} A_t \cdot (1+i)^{-t}$$

3.2 Ratentilgung

Ist definiert durch ***Tilgungsraten in gleichbleibender Höhe***

$$T_1 = T_2 = \ldots = T_n = T$$

Um einen vollständigen **Tilgungsplan** aufzustellen wird in zwei Schritten vorgegangen

3.2.1 Berechnung der Tilgungsrate

Aus GG3 folgt

$$K_0 = \sum_{t=1}^{n} T = n \cdot T \,,$$

daher ergibt sich die Tilgungsrate T:

$$T = \frac{K_0}{n} \,.$$

3.2.2 Berechnung des Zinsbetrags, der Annuität und der Restschuld (für jedes Jahr)

Für t=1 können Zinsbetrag Z_1, Annuität A_1 und Restschuld K_1 mit Hilfe der GG einfach berechnet werden. Die entsprechenden Werte für die folgenden Jahre können iterativ abgeleitet werden.

Beispiel:

Ein Kredit über 300.000 € zu 7 % Zins wird gewährt. Er wird über 8 Jahre in gleichbleibenden Raten getilgt. Wie lautet der Tilgungsplan.

Die jährliche Tilgungsrate beläuft sich auf T = 300.000/8 = 37.500 €.

Mit Hilfe der GG 4 erhält man den Zinsbetrag:
$Z1 = i*K_0 = 300.000 * 0,07 = 21.000$ €

Mit Hilfe der GG 1 erhält man die Annuität:
$A1 = Z_1 + T_1 = 21.000 + 37.500 = 58.500$ €

Mit Hilfe der GG2 erhält man die Restschuld:
$K1 = K_0 - T_1 = 300.000 – 37.500 = 262.500$ €

Iterativ können sämtliche Werte für jedes Jahr berechnet werden und man erhält schließlich den vollständigen Tilgungsplan.

t	K(t)	Z(t)	T(t)	A(t)
0	300.000	-	-	-
1	262.500	21.000	37.500	58.500
2	225.000	18.375	37.500	55.875
3	187.500	15.750	37.500	53.250
4	150.000	13.125	37.500	50.625
5	112.500	10.500	37.500	48.000
6	75.000	7.875	37.500	45.375
7	37.500	5.250	37.500	42.750
8	-	2.625	37.500	40.125

Alternativ werden Formeln abgeleitet, mit Hilfe derer zu jedem Zeitpunkt explizit die gefragten Werte berechnet werden können.

Zuerst wird die Restschuld zum Zeitpunkt t ermittelt.

$$
\begin{aligned}
&K_1 = K_0 - T \\
&K_2 = K_1 - T = K_0 - 2\cdot T \\
&K_3 = K_2 - T = K_0 - 3\cdot T \\
&\ldots \\
&K_t = K_{t-1} - T = K_0 - t\cdot T
\end{aligned}
$$

Wegen

$$T = \frac{K_0}{n}.$$

gilt auch

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 - \frac{t}{n}\right).$$

Der Zinsbetrag zum Zeitpunkt t ist

$$Z_t = i \cdot K_{t-1} = i \cdot \left(1 - \frac{t-1}{n}\right) \cdot K_0.$$

und die Annuität zum Zeitpunkt t ist

$$
\begin{aligned}
A_t &= Z_t + T = i \cdot \left(1 - \frac{t-1}{n}\right) \cdot K_0 + \frac{K_0}{n} = \\
&= \left(i \cdot \left(1 - \frac{t-1}{n}\right) + \frac{1}{n}\right) \cdot K_0 \qquad .
\end{aligned}
$$

3.3 Annuitätentilgung

Ist definiert durch ***Annuitäten in gleichbleibender Höhe***

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$$

Um einen vollständigen **Tilgungsplan** aufzustellen wird wieder in zwei Schritten vorgegangen

3.3.1 Berechnung der Annuität

Aus GG 5 erhält man leicht eine Formel zur Berechnung der jährlichen Annuitäten.

$$K_0 = \sum_{t=1}^{n} A \cdot (1+i)^{-t}$$

$$A = \frac{K_0}{\sum_{t=1}^{n} (1+i)^{-t}}$$

oder (mit Hilfe der Summenformel der geometrischen Reihe)

$$\boxed{A = \frac{i \cdot q^n}{q^n - 1} \cdot K_0}$$

(Wiederholung: Rentenrechnung – Rentenhöhe bei gegebenem Barwert)

Mithilfe EXCEL: Funktion RMZ

3.3.2 Berechnung des Zinsbetrags, der Tilgungsrate und der Restschuld (für jedes Jahr)

Für t=1 werden Zinsbetrag Z_1, Tilgungsrate T_1 und Restschuld K_1 mit Hilfe der GG berechnet. Die entsprechenden Werte für die folgenden Jahre können wieder iterativ abgeleitet werden.

Beispiel:
Ein Kredit über 300.000 € zu 7 % Zins wird gewährt. Er wird über 8 Jahre in gleichbleibenden Annuitäten getilgt.

Die jährliche Annuität beträgt beläuft sich auf
$A = (0{,}07 * 1{,}07^8)/(1{,}07^8 - 1) * 300.000 = 50.240$ €.

GG4: $Z_1 = i * K_0 = 300.000 * 0{,}07 = 21.000$ €

GG1: $T_1 = A_1 - Z_1 = 50.240 - 21.000 = 29.240$ €

GG2: $K_1 = K_0 - T_1 = 300.000 – 29.240 = 270.760$ €

Iterativ ergibt sich der vollständige Tilgungsplan.

t	K(t)	Z(t)	T(t)	A(t)
0	300.000	-	-	-
1	270.760	21.000	29.240	50.240
2	239.473	18.953	31.287	50.240
3	205.995	16.763	33.477	50.240
4	170.175	14.420	35.821	50.240
5	131.847	11.912	38.328	50.240
6	90.835	9.229	41.011	50.240
7	46.954	6.358	43.882	50.240
8	0	3.287	46.954	50.240

Übungsbeispiele:

..\finanzmathematik uebungen\UEB3.XLS
finanzmathematik_übung.xls

3.4 Unterperiodische Tilgung

Weichen Zinsperiode und Abstand zwischen zwei Annuitätenzahlungen (Annuitätenperiode) voneinander ab, so können Fälle unterschieden werden, dass die Zinsperiode ein ganzzahliges Vielfaches der Annuitätenperiode ist oder umgekehrt.

In der wirtschaftlichen Praxis erfolgt aber zumindest eine Zahlung je Zinsperiode, sodass wir uns auf diesen Fall beschränken:

Die Zinsperiode kann mehrere Annuitätenzahlungen enthalten, sie ist ein ganzzahliges Vielfaches der Annuitätenperiode.

Der *häufigste Fall* ist der, dass man den Jahreszinssatz (=nominellen Zinssatz) kennt und unterjährige Tilgungszahlungen (z.B. monatliche Zahlungen) zu ermitteln hat.

Dazu ist es notwendig, den zum Jahreszinssatz konformen unterjährigen Zinssatz zu ermitteln und mit diesem dann den Tilgungsplan zu erstellen.

Beispiele: finanzmathematik_übung.xls

3.5 Berechnungen ohne Tilgungsplan für den Fall der Annuitätentilgung

Es können Formeln für die Annuitätentilgung abgeleitet werden, mit Hilfe derer zu jedem Zeitpunkt explizit die gefragten Werte berechnet werden können, ohne den ganzen Tilgungsplan auszurechnen.

Wir beginnen mit der Ableitung einer Formel für die Tilgungsrate.

$$
\begin{aligned}
& A_t = A_{t-1} \Leftrightarrow Z_t + T_t = Z_{t-1} + T_{t-1} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow i \cdot K_{t-1} + T_t = i \cdot K_{t-2} + T_{t-1} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow T_t = T_{t-1} + i \cdot (K_{t-2} - K_{t-1}) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow T_t = T_{t-1} + i \cdot T_{t-1} \Leftrightarrow \\
& T_t = T_{t-1} \cdot q
\end{aligned}
$$

Bei gegebenem T_1 erhält man

$$
\begin{aligned}
T_t &= T_{t-1} \cdot q = T_1 \cdot q^{t-1} \\
&= (A - Z_1) \cdot q^{t-1} \\
&= \left(\frac{i \cdot q^n}{q^n - 1} \cdot K_0 - i \cdot K_0 \right) \cdot q^{t-1} \\
&= \left(\frac{q^n}{q^n - 1} - 1 \right) \cdot i \cdot q^{t-1} \cdot K_0
\end{aligned}
$$

$$
T_t = \frac{i \cdot q^{t-1}}{q^n - 1} \cdot K_0 .
$$

Daher erhält man den Zinsbetrag Z_t

$$Z_t = A - T_t$$

$$Z_t = \frac{i \cdot (q^n - q^{t-1})}{q^n - 1} \cdot K_0 \, .$$

Um die Restschuld abzuleiten, geht man von GG2 aus.

$$K_1 = K_0 - T_1 = K_0 - \frac{i}{q^n - 1} \cdot K_0 = \frac{q^n - q}{q^n - 1} \cdot K_0$$

$$K_2 = K_1 - T_2 = \frac{q^n - q^2}{q^n - 1} \cdot K_0$$

...

$$\boxed{K_t = K_t - T_{t-1} = \frac{q^n - q^t}{q^n - 1} \cdot K_0}.$$